Ações do professor na condução de discussões matemáticas[1]

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Joana Mata-Pereira
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Marisa Quaresma
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Introdução

Nos últimos anos, as orientações curriculares para o ensino da Matemática têm conhecido uma importante evolução no que respeita ao trabalho a efetuar na sala de aula, valorizando-se a proposta de tarefas como explorações, investigações e problemas e a sua discussão coletiva na turma (Ponte, Nunes, & Quaresma, 2012) e realçando-se o raciocínio matemático como capacidade transversal no ensino desta disciplina. Esta forma de trabalho na sala de aula tem vindo a ganhar expressão como perspetiva curricular de Matemática de cunho exploratório ou investigativo (*inquiry mathematics*).

Esta ênfase na realização de tarefas desafiantes e na promoção de uma cultura na sala de aula onde os alunos apresentam e debatem os seus raciocínios suscita uma forte imprevisibilidade no trabalho do professor, colocando-lhe sérios desafios (Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008). Na realização destas tarefas, a organização e condução de discussões coletivas evidencia-se como particularmente importante para a aprendizagem dos alunos, constituindo uma importante faceta da prática profissional do professor. Esta prática pode ser encarada como a atividade que o professor desenvolve, de modo recorrente, no quadro das suas funções profissionais, e que se desdobra em ações realizadas segundo um certo plano de ação (Jaworski & Potari, 2009; Schoenfeld, 2000). No estudo da prática é importante ter em atenção os motivos que lhe dão origem e os significados que lhes são atribuídos pelos participantes (Ponte & Chapman, 2006).

O trabalho do professor numa aula onde os alunos realizam tarefas de natureza investigativa foi objeto de atenção em Portugal por Ponte, Oliveira, Brunheira, Varandas e Ferreira (1998) que identificaram diversos papéis do professor cruzando dimensões matemáticas e didáticas. Mais recentemente, tem-se dado sobretudo atenção a aspetos relacionados com a seleção das tarefas e a comunicação na sala de aula, sublinhando a natureza do questionamento, a negociação de significados e os processos de redizer (Ponte, Quaresma, & Branco, 2012). No entanto, o estudo das questões envolvidas na condução de discussões coletivas está largamente por fazer. O objetivo deste artigo é compreender este aspeto da prática do professor, procurando identificar problemas que emergem durante a sua realização.

Discussão na aula de Matemática como aspeto da prática do professor

Desde os anos 90 tem-se vindo a afirmar a importância do trabalho coletivo com toda a turma. Lampert (1990) sugere como pode ser a dinâmica desse tipo de aula, onde os alunos discutem as soluções de problemas matemáticos. Ao contrário da sala de aula convencional, fortemente controlada pelo professor, e onde as possibilidades de intervenção dos alunos eram muito limitadas, procura-se aqui proporcionar aos alunos um espaço alargado de participação. Estes são incentivados a apresentar as suas soluções e as suas estratégias para a resolução das tarefas bem como a questionar as soluções e estratégias dos colegas, seja porque não as compreendem, seja porque não as consideram matematicamente válidas.

Um momento particularmente favorável para este tipo de participação dos alunos na aula são as discussões matemáticas. A este respeito, Wood (1999) evidencia o potencial que a exploração de desacordos entre os alunos pode ter para a aprendizagem. Debruçando-se sobre o papel do professor na criação deste contexto de trabalho, indica a importância de se estabelecer a expetativa que os alunos apresentem o seu pensamento e soluções aos colegas e, muito especialmente, que saibam prestar atenção aos outros. Pelo seu lado, Potari e Jaworski (2002) sublinham a importância do grau de desafio das questões do professor nos momentos de discussão coletiva. Na verdade, explorar desacordos e desafiar os alunos constituem aspetos muito importantes das discussões matemáticas, colocando-se a questão de saber como os promover, especialmente quando os alunos evidenciam grandes dificuldades de comunicação.

Mais recentemente, o trabalho do professor na condução de discussões matemáticas tem vindo a ser abordado por outros autores. Por exemplo, Stein *et al.* (2008) apontam que um aspeto central da prática do professor é dar forma às ideias incompletas e frequentemente mal formuladas dos alunos de modo a transformá-las em ideias matemáticas mais precisas e poderosas e sublinham a necessidade de organizar cuidadosamente a informação sobre o trabalho dos alunos como ponto de partida para a realização de discussões coletivas. Estes autores referem que uma discussão matemática produtiva tem duas caraterísticas fundamentais: apoiar-se no pensamento dos alunos e avançar ideias matemáticas importantes. Sublinham a complexidade do trabalho do professor na condução de discussões matemáticas, apontando que as estratégias dos alunos são frequentemente muito diferentes umas das outras. Indicam, também, que cabe ao professor dar coerência às ideias dispersas dos alunos, enquadrando-as no conhecimento matemático estabelecido. Apresentam então um modelo para a preparação e realização de discussões matemáticas contemplando ações de antecipar, monitorizar, selecionar, sequenciar e estabelecer conexões entre respostas dos alunos. Ao mesmo tempo, consideram ser necessário articular duas normas fundamentais — valorizar a autoridade dos alunos e a sua responsabilização.

Uma preparação feita nestas condições é um apoio importante à condução da discussão, mas, para além do estabelecimento de conexões, esta condução envolve muitos outros aspetos que não podem ser previstos numa etapa prévia e que o professor tem de estar preparado para enfrentar. Na verdade, como mostra Sherin (2002), na condução de uma discussão é necessário equilibrar aspetos relativos aos conhecimentos matemáticos, filtrando as ideias dos alunos, focando a sua atenção nas ideias fundamentais e prestar atenção aos processos matemáticos. Esta autora salienta a importância de identificar situações potencialmente problemáticas durante uma discussão, indicando possíveis modos de atuar em função dos objetivos curriculares e das caraterísticas dos alunos.

Debruçando-se igualmente sobre os momentos de discussão, Brodie (2010) oferece um quadro de análise das ações do professor tendo em vista o desenvolvimento do raciocínio dos alunos. Na sua perspetiva, o nível de raciocínio matemático dos alunos está estreitamente relacionado com a estrutura das tarefas propostas (destacando a realização de procedimentos com compreensão), com as ações do professor e com a compreensão dos alunos. Salienta dois tipos de intervenções que podem servir para promover ou estender o raciocínio matemático dos alunos: questionar, em que o professor procura obter deles nova informação, e pressionar (*press*), em que procura levá-los a elaborar ou reforçar as suas ideias. Identifica um conjunto de ações do professor para controlar a trajetória da discussão, nomeadamente inserir (uma ideia, solução ou ligação), manter uma contribuição (focando ou reforçando a atenção) e confirmar (o significado de uma contribuição de um aluno). Aponta ainda dois dilemas que surgem com frequência nas discussões, relativos ao modo de ligar os alunos ao assunto e ao facto de se trabalhar simultaneamente com indivíduos e grupos. Aponta, ainda, outros problemas como a possível resistência dos alunos à participação nas discussões e a criação de oportunidades para proporcionar clareza e significado (*sense making*) nas discussões da sala de aula.

Fraivillig, Murphy e Fuson (1999) e, posteriormente, Cengiz, Kline e Grant (2011) estudam também o modo como o professor conduz discussões coletivas na sala de aula, identificando ações de ensino através das quais este procura criar oportunidades para promover o pensamento matemático dos alunos. O seu modelo tem três categorias de ações: levar os alunos a apresentar os seus métodos (*eliciting*), apoiar a compreensão concetual das crianças (*supporting*) e alargar o pensamento dos alunos (*extending*). Os resultados do estudo mostram que os objetivos dos professores participantes se integravam sobretudo em duas categorias: construir conexões matemáticas e atender a conceções incorretas dos alunos. Este estudo mostra como as ações do professor se diferenciam consoante o momento da discussão, sendo importante perceber como valorizar as ações capazes de alargar o pensamento dos alunos.

A maioria destes estudos dá atenção explícita ou implícita ao trabalho do professor para promover o raciocínio matemático. No entanto, o raciocínio matemático é frequentemente identificado com raciocínio dedutivo, sem que se preste muita atenção aos aspetos indutivos e abdutivos do raciocínio matemático. Mata-Pereira e Ponte (2012) procuram articular os vários tipos de raciocínio destacando a generalização, associada sobretudo ao raciocínio indutivo e abdutivo, e a justificação, associada principalmente ao raciocínio dedutivo. Consideram importante levar os alunos a formular conjeturas relativas a classes alargadas de objetos (generalização) e procurar validá-las usando propriedades e definições matemáticas (justificação). Para isso, é necessário trabalhar com representações matemáticas apropriadas, combinando, quando necessário, representações de natureza formal (como a linguagem algébrica) e informal (como esquemas e diagramas) bem como atender aos processos de criação de significado (*sense making*), valorizando as conexões intra e extra matemáticas.

Metodologia de investigação

Esta investigação segue uma metodologia qualitativa e interpretativa. O estudo é realizado numa turma de 9.º ano de uma professora convidada em função da sua experiência. A professora tem 13 anos de serviço, 7 dos quais na escola onde leciona atualmente e investe na formação contínua tendo em vista melhorar a sua prática profissional. A turma tem 29 alunos (21 rapazes e 8 raparigas) e um ambiente de trabalho muito produtivo. De acordo com a professora, 8 alunos têm muito bom desempenho na disciplina de Matemática, 9 têm algumas dificuldades e os restantes 12 têm um desempenho satisfatório. As aulas do estudo foram lecionadas pela professora, sendo a recolha de dados realizada pela segunda autora, no papel de observadora não participante. Esta recolha tem por principal instrumento a observação de aulas (gravadas em vídeo e áudio) complementada por momentos de conversa com a professora, conduzidas de modo informal com o objetivo de identificar os significados relativos a diversos aspetos das suas ações, e registadas em diário de bordo.

Os dados apresentados neste artigo dizem respeito a duas aulas. O primeiro episódio refere-se a uma das primeiras aulas de introdução ao tópico das equações de 2.º grau e o segundo episódio é retirado da aula final do tópico da proporcionalidade inversa. Em ambas as aulas, a análise foca-se em momentos de discussão coletiva. A seleção destes episódios deve-se sobretudo às suas diferenças, dado que, no primeiro, o momento de discussão surge como introdução a um novo tópico, enquanto no segundo momento se discute uma tarefa previamente realizada pelos alunos. Assim, a primeira discussão incide na resolução de uma equação do 2.º grau incompleta do tipo $ax^2 + bx = 0$ e a segunda discussão num problema de proporcionalidade inversa. A análise de dados tem por base as categorias do modelo apresentado na figura 1, sendo efetuada com o apoio do software NVivo. A análise é realizada por segmentos, correspondendo cada um deles à realização de uma das questões do problema proposto ou à exploração de um aspeto particular de uma dessas questões. Em cada um destes segmentos identificamos os problemas com que a professora se depara e que desencadeiam as ações que são objeto de análise.

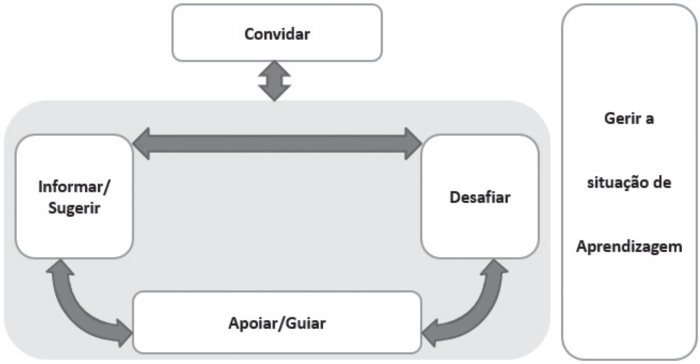

Figura 1 — Modelo das ações do professor na condução de discussões matemáticas

No que respeita ao modelo de análise usado, um primeiro aspeto importante é que este modelo pressupõe dois grandes tipos de ação por parte do professor — por um lado as ações diretamente relacionadas com os tópicos e processos matemáticos e por outro lado ações que têm sobretudo a ver com a gestão da aprendizagem. Interessam-nos sobretudo as ações relacionadas com os aspetos matemáticos. *Convidar* proporciona o envolvimento inicial dos alunos num dado segmento da discussão. Outros três tipos de ações, *apoiar/guiar*[2], desafiar e informar/sugerir, são aquelas que formam o principal suporte das discussões matemáticas. Nas ações de apoiar/guiar o professor promove a continuação da participação dos alunos na resolução de um problema já iniciado, conduzindo os alunos de modo discreto ou explícito, através de perguntas ou por outras intervenções. Em *informar/sugerir*[3] o professor assume o papel de introduzir informação, proporcionar argumentos, ou validar respostas dos alunos. Em contrapartida, em *desafiar* procura que sejam os alunos a assumir esse papel. Em *sugerir* o professor assume a responsabilidade integral do discurso matemático, em *apoiar* procura conduzir o aluno de forma na resolução da tarefa e em *desafiar* coloca o aluno na situação de ser ele próprio a avançar em terreno novo, seja em termos de representações, da interpretação de enunciados, do estabelecimento de conexões, ou de raciocinar, argumentar ou avaliar. Este modelo combina ideias de modelos anteriores, dando especial atenção às ações que visam iniciar ou apoiar o trabalho dos alunos (tal como em Cengiz, Kline, & Grant, 2011) e às que constituem desafios (tal como em Potari & Jaworski, 2002).

Episódio 1 — Resolução de uma equação do 2.º grau incompleta

Esta primeira situação que analisamos diz respeito a uma discussão coletiva que visa introduzir a resolução de equações do 2.º grau do tipo $ax^2 + bx = 0$. Antes dos segmentos que apresentamos, os alunos resolveram e discutiram um problema que envolve implicitamente a lei do anulamento do produto, mas que não é explorado com o intuito de generalizar esta lei para a resolução de equações do 2.º grau incompletas. Além disso, a professora recordou a resolução de equações incompletas do tipo $ax^2 = 0$ e $ax^2 + c = 0$, trabalhadas na aula anterior.

Segmento 1. A professora começa por escrever no quadro uma equação do 2.º grau incompleta (Figura 2), convidando de seguida os alunos a resolver a equação:

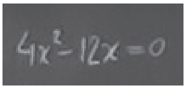

Figura 2 — Equação do 2.º grau proposta

> *Professora:* OK. Então, olhem lá todos para cá. (…) Têm esta equação, OK? Incompleta, falta-nos o *c*. Quem tenta resolver comigo esta equação? Apenas com aquilo que vocês sabem. Já sabem resolver equações de 1.º grau, já sabem resolver algumas de 2.º grau. Eu podia dizer-vos, vamos tentar resolver esta equação. Irina, o que é que tu farias?
>
> *Irina:* Eu faria… Se calhar, passava o menos 12 a mais 12 lá do outro lado.
>
> *Professora:* Então vou pôr [escreve no quadro], $4x^2$ igual a $12x$.
>
> *Irina:* Exatamente.
>
> *Professora:* É verdade, esta equação [$4x^2 - 12x = 0$] é equivalente a esta [$4x^2 = 12x$].

Irina, tal como sugere a professora, começa a resolver a equação como se se tratasse de uma equação de 1.º grau, generalizando assim um princípio de equivalência já conhecido destas equações para as equações de 2.º grau. Visto ser a primeira resolução de uma equação de 2.º grau incompleta deste tipo, a professora regista o passo proposto por Irina e valida-o, afirmando que esta equação é equivalente à apresentada. Com esta validação, a aluna continua a sua proposta de resolução:

> *Irina:* Depois faria o mesmo procedimento como normalmente. Faria x^2 igual a $12x$ a dividir por 4.
>
> *Professora:* Perfeitamente equivalente. Cinco estrelas. [Aguarda mas Irina fica calada] Agora a pergunta é, quando eu estou a resolver uma equação qual é o objetivo?
>
> *Vários alunos:* Descobrir o valor da incógnita.
>
> *Professora:* Conseguiste descobrir o valor da incógnita?

Irina, uma vez mais, generaliza um princípio de equivalência já conhecido para as equações de 1.º grau à resolução de equações do 2.º grau. Tal como no passo anterior, a professora regista no quadro a resolução da aluna e valida a sua sugestão. Como esta não avança na resolução da equação, a professora decide focar a atenção dos alunos no objetivo da resolução da equação. Dada a resposta dos alunos à chamada de atenção, a professora rediz a expressão "descobrir o valor da incógnita".

Neste segmento, identificamos diversos problemas com que a professora se depara. Um primeiro é o modo de introduzir um novo assunto. A professora decide propor uma tarefa para ser resolvida coletivamente, começando por dar indicações sobre conexões que os alunos precisam de estabelecer e pedindo as suas contribuições. Um segundo problema prende-se com a seleção de um aluno para dar início à discussão. Como a discussão não tem por base a resolução prévia de uma tarefa, a professora decide selecionar uma aluna que pressupõe que poderá dar sugestões pertinentes, dado o seu muito bom desempenho na disciplina. De acordo com a professora, as discussões desta natureza são possíveis nesta turma porque vários alunos têm muito bom desempenho e estão sempre dispostos a participar. Um terceiro problema com que a professora se depara neste primeiro segmento da discussão é a incapacidade da aluna selecionada progredir na resolução da equação. De entre as várias opções possíveis, como completar a resolução ou solicitar a participação de outro aluno, a professora decide focar a atenção dos alunos no objetivo da resolução, levando-os a avaliar a resposta da aluna em relação a esse objetivo e, na sequência, solicita a participação de outro aluno, originando um novo segmento na discussão.

Segmento 2. Como Irina parece não saber como avançar, a professora faz um novo convite à participação, selecionando Hugo:

> *Professora:* Hugo, uma tentativa.
>
> *Hugo:* x^2 menos x igual a zero menos 4 mais 12.
>
> *Professora:* Isso é possível?
>
> *Vários alunos:* Não.
>
> *Professora:* Porquê? Ele fazia isto [escreve no quadro $x^2 - x = 12 - 4$].

Ainda que a professora tenha decidido validar a resposta de Irina, neste caso, como Hugo apresenta uma proposta inválida, remete a avaliação para os alunos e questiona-os para que justifiquem essa avaliação. Contudo, para que os alunos possam justificar a sua opinião, regista a resolução de Hugo no quadro, paralelamente à de Irina. Com o registo no quadro, a professora retoma a avaliação da resposta de Hugo e, para isso, sugere aos alunos que se recordem das operações com monómios:

> Isto é possível? Esta expressão [$x^2 - x = 12 - 4$] é equivalente a esta [$4x^2 - 12x = 0$]? Lembrem-se que isto [$4x^2$] é como se fosse um conjunto, um monómio, não posso separar o coeficiente da sua parte literal. Eu não tenho isto aqui assim [$4 + x^2 - 12 + x = 0$], Hugo.

O aluno sugere então uma nova resolução:

> *Hugo:* Então… E se juntar o x do 12 ao x^2?
>
> *Professora:* Então primeiro, posso somar estes dois pequenos monómios [$4x^2$ e $12x$]?
>
> *Vários alunos:* Não!
>
> *Guilherme:* Pode.

Dado que esta sugestão envolve as propriedades das operações com monómios, a professora decide questionar os alunos com o objetivo de esclarecer essas propriedades. Ainda que a maioria dos alunos pareça ter presente que não se podem somar monómios de graus diferentes, Guilherme afirma o contrário. Assim, a professora explora a possibilidade de analisar o erro deste aluno, solicitando que apresente a sua representação da situação:

> *Professora:* Então faz lá.
>
> *Guilherme:* $4x^2$ é a mesma coisa que ter $4x$ vezes $4x$ stôra.
>
> *Professora:* É?
>
> *Vários alunos:* Não.
>
> *Professora:* O Guilherme perguntou-me se $4x^2$ é o mesmo que ter $4x$ vezes $4x$.
>
> *Vários alunos:* Não.
>
> *Professora:* Não, porquê?

Guilherme tenta decompor o monómio, contudo, fá-lo erradamente. Assim, a professora começa por propor aos alunos que validem a sugestão de Guilherme, reforçando logo de seguida a proposta do aluno. Uma vez que os alunos não fundamentam a avaliação feita, a professora pede para justificarem. No entanto, Guilherme apercebe-se do seu erro, corrigindo-o sem dar tempo aos colegas de apresentarem a justificação pedida:

> *Guilherme:* Mas podíamos pôr, stôra, por exemplo, $2x$ vezes $2x$, dá $4x^2$. E depois ficava $2x$ vezes $2x$ menos $12x$ igual a zero.
>
> *Professora:* OK, até aí tudo bem. Vou escrever para ti. $2x$ vezes $2x$, menos os $12x$ igual a zero. Também é equivalente, OK?

Visto que a decomposição de Guilherme está correta, a professora indica a sua validade, registando a equação no quadro.

A professora pede, então, a Guilherme que avance na sua resolução. Perante a dificuldade do aluno, decide recordar o objetivo da resolução da equação o que permite ao aluno avançar na sua resolução, ainda que dê um passo inválido:

Guilherme: Para não estar outra vez $2x$ vezes $2x$, depois ia dar… Não sei se podia dividir por k. $2x$ menos $12x$ igual a zero a dividir por $2x$.

Professora: Este aqui [$2x$] está a multiplicar por toda a expressão?

Vários alunos: Não.

Professora: Eu quando divido, quando vou passar aqui a dividir por $2x$, significa que dividi em toda a expressão.

Visto que a resolução de Guilherme não é válida, a professora sugere uma interpretação da afirmação do aluno e recorda o uso de um princípio de equivalência da resolução de equações.

Neste segmento, tal como no anterior, a professora decide continuar o diálogo com a turma, escolhendo de novo como interlocutor um aluno com bom desempenho (Hugo). Contudo, ainda que no segmento 1 esta opção tenha gerado uma discussão interessante, neste caso a participação parece ficar aquém do esperado. Isto faz surgir um novo problema — o modo de avançar perante uma resolução incorreta. A professora decide remeter para a turma a avaliação da resolução do aluno, dando algumas sugestões que podem contribuir para essa avaliação. Na sequência surge um novo problema, visto que os alunos estão em desacordo quanto à avaliação da resolução do colega. A professora decide então selecionar um aluno que faz uma afirmação incorreta (Guilherme) para foco da discussão. Perante uma resolução incorreta deste aluno surge novamente o problema de como avançar, tal como já havia acontecido com Hugo. A professora resolve este problema de modo semelhante, remetendo para a turma a avaliação da resolução do aluno. Surge ainda nesta discussão uma situação em que a professora decide intervir por um aluno não conseguir avançar na sua resolução. Este problema, semelhante a um problema do segmento anterior, tem também uma solução semelhante — a professora recorda o objetivo da tarefa e convida de seguida outro aluno a participar.

Segmento 3. Como Guilherme, tal como Irina, não consegue avançar na resolução da equação, a professora convida outra aluna a continuar:

Professora: Maria.

Maria: Stôra, voltando ali àquele $\left[x^2 = \frac{12x}{4}\right]$…

Professora: Voltando a esta $\left[x^2 = \frac{12x}{4}\right]$.

Maria: É possível fazer x^2 a dividir por x igual a 12 a dividir por 4?

Professora: Ah, a Maria fez assim… Viram o que ela fez?

Vários alunos: Sim.

Professora: Vou fazer o que ela fez, este x [do segundo membro]… Escreveu isto, vou continuar $\left[\text{escreve } \frac{x^2}{x} = \frac{12x}{4}\right]$.

Considerando a intervenção de Maria, a professora começa por localizar os alunos na resolução de Irina a que Maria se refere, voltando, logo de seguida a chamar a atenção dos alunos, registando a proposta de Maria no quadro. Antes de prosseguir, Lourenço intervém, afirmando que a proposta de Maria não é válida:

> *Lourenço:* Isso não dá, estão separadas.
>
> *Professora:* Primeira pergunta, ela pode fazer esta passagem?
>
> *Alguns alunos:* Pode.
>
> *Outros alunos:* Não.

A intervenção de Lourenço é reforçada pela questão que a professora coloca para avaliar a validade da sugestão de Maria. Perante a divisão de opiniões a que esta resposta dá origem, a professora explora o desacordo, interpelando um dos alunos que responde negativamente:

> *Professora:* Quem diz que não? [Alguns alunos levantam o braço.] Lourenço, não porquê?
>
> *Lourenço:* Stôra, não pode separar!
>
> *Professora:* Não pode separar o quê?
>
> *Lourenço:* O 12 do x.
>
> *Professora:* Então espera. Quando eu faço assim, $2x$ igual a 4 [escreve $2x = 4$]. Este 2, o coeficiente, eu não o separo? Separo ou não?
>
> *Vários alunos:* Sim.

Apesar de a professora pedir a Lourenço para justificar a sua afirmação, ele não o faz de forma clara, pelo que lhe pede um esclarecimento adicional. Esclarecida a situação, a professora sugere um contraexemplo que refuta a afirmação do aluno, pedindo a sua validação à turma. Perante a validação da turma, a professora avança na sua sugestão, que é reforçada por Mário e seguida de um novo pedido de validação:

> *Professora:* Se eu separo o coeficiente, não posso separar a parte literal? Foi o que ela fez aqui $\left[\frac{x^2}{x} = \frac{12x}{4}\right]$, por exemplo.
>
> *Mário:* E é o que se faz em cima [$4x^2 = 12x$], quando separámos o 4 do x^2 lá para baixo $\left[x^2 = \frac{12x}{4}\right]$.
>
> *Professora:* Posso ou não?
>
> *Vários alunos:* Pode.

Confirmada a validade do passo sugerido por Maria, a professora pede à aluna que prossiga com a sua resolução:

> *Professora:* E agora? Maria, parei aqui, e agora?
>
> *Aluno:* x igual a 3.
>
> *Professora:* É que há bocadinho não cheguei aqui na outra turma. Agora estou curiosa. Olha lá para ali. Quanto é que é? Se eu quisesse ir por aqui, x^2 a dividir por x.
>
> *Vários alunos:* Dá x.
>
> *Professora:* Igual a…
>
> *Vários alunos:* Três!
>
> *Maria:* Então, isso é possível.

Maria não chega a responder pois um colega dá prontamente a resposta seguinte. A professora insiste na questão, para dar oportunidade a Maria para responder. Contudo, vários alunos intervêm, pelo que a professora apenas a ajuda a completar a resposta. Maria conclui, assim, que a sua resposta é válida. A professora, no entanto, decide explorar um pouco mais a situação:

> *Professora:* Isto é possível?
>
> *Vários alunos:* É.
>
> *Professora:* Como é que eu posso ver se esta solução está correta?
>
> *Aluno:* Substituímos.

Além de pedir aos alunos que validem a situação, a professora solicita uma justificação para essa validação. Um aluno responde prontamente e a professora acompanha essa justificação:

> *Professora:* Então vamos fazer devagarinho. Fazem comigo devagar. Jorge, podes fazer devagar? Aqui é o 3 [referindo-se ao x]. x^2…
>
> *Lourenço:* Dá 9.
>
> *Professora:* 9 vezes 4…
>
> *Lourenço:* 36.
>
> *Professora:* 36. 3 vezes 12…
>
> *Vários alunos:* 36.
>
> *Professora:* 36 menos 36…
>
> *Vários alunos:* Vai dar zero.

Nesta situação, o questionamento da professora promove a justificação da resposta, ainda que grande parte dessa justificação seja concretizada pela própria professora.

Neste segmento da discussão, perante o problema de selecionar um aluno para participar, a decisão da professora é distinta dos segmentos anteriores, pois opta por dar a palavra a uma aluna que se propõe participar (Maria). O segundo problema com que se depara é um desacordo entre dois alunos (Maria e Lourenço). Nesta situação, explora o desacordo, dando a palavra ao aluno que apresenta uma afirmação incorreta. Um outro problema que surge neste segmento é o que fazer perante a obtenção da solução por uma das alunas. Neste momento, a professora decide levar a resolução mais além, levando os alunos a explorar coletivamente a resposta já obtida.

Segmento 4. Tendo chegado a uma solução da equação, os alunos dão a resolução como terminada. Encontram-se um pouco agitados por terem conseguido resolver uma equação de 2.º grau para a qual não conheciam inicialmente o processo de resolução. Luís pergunta diretamente à professora se não poderia existir outra solução. A professora devolve-lhe a pergunta e o aluno indica que poderia ser zero. A professora pede-lhe então para explicar a sua resposta:

> *Luís:* Se substituirmos vai dar zero. Então, x^2 é zero. Quatro vezes x é quatro vezes zero. Menos doze vezes zero é zero. E zero menos zero é igual a zero.
>
> *Professora:* OK. Então, olham para cá agora, todos! Olhem para cá. Deixem-me só dizer isto. Vou pegar naquela equação que a Maria resolveu e foi até ali e encontrou aquela solução. $4x^2$ menos $12x$, igual a zero. Quero fatorizar, aquilo que vimos na última aula, quero fatorizar esta expressão, este polinómio. Como é que ficava, Guilherme, fatorizado?

A professora, que já sabia que Luís tinha encontrado outra solução, desafia-o a justificar que a solução da equação também pode ser zero. Partindo desta justificação, a professora chama a atenção dos alunos e propõe-lhes uma nova questão. Conduz os alunos a participar ao dizer "Quero fatorizar", vários alunos levantam o braço e seleciona Guilherme. Este sugere uma factorização que não seria útil para introduzir a resolução da equação com a lei do anulamento do produto, a professora, ainda que registe a proposta no quadro, solicita outra factorização, dada prontamente por Joaquim e também registada no quadro. Perante isto, alguns alunos indicam que não compreenderam bem como se obtém uma factorização, pelo que a professora recorda o que foi trabalhado na aula anterior. De seguida, retoma a discussão sobre as duas factorizações apresentadas, questionando Guilherme sobre as suas diferenças e salientando o grau dos polinómios de cada factorização. Tenta levar os alunos a generalizar as conclusões obtidas na resolução de um problema anterior para a resolução desta equação:

> *Professora:* Então agora pergunto-vos a vocês, para ver se perceberam bem a atividade há bocado. Tenho $4x$ vezes $x-3$. Este [$4x$] vezes este [$x-3$], dá zero. Quando é que este valor vezes este dá zero? O que é que tem que acontecer?

Alguns alunos: O x tem de ser zero.

Professora: Obrigatoriamente?

Vários alunos: Não!

Professora: Vamos ver. Mário, fala comigo.

Bernardo: Eu não sei se isto está certo, mas podia ser… Quatro zero, onde está $4x$, quatro zero e em vez daquele x estar três.

Perante a questão da professora, vários alunos indicam de imediato uma das soluções da equação. Contudo, não é claro que tenham realizado a generalização pedida, pelo que a professora questiona-os sobre a possibilidade de haver outra solução. Neste momento, um dos alunos fala sobre o problema com um dos colegas que indicou que o x é zero, o que leva a professora a chamá-lo para que partilhe o que está a discutir. Contudo, quem participa é Bernardo, aplicando o conhecimento anterior a uma nova situação e generalizando assim a lei do anulamento do produto para a resolução deste tipo de equações do 2.º grau. Como a sugestão do aluno é apresentada de um modo pouco formal, a professora formaliza-a:

Professora: OK. Ou seja, eu posso ou tentar anular esta parte, ou tentar anular esta parte. Porque eu sei que numa multiplicação, para o produto dar zero, um deles tem de ser zero. Eu posso escrever assim, ou o $4x$ é igual a zero, ou esta primeira parte é igual a zero, ou… Ou o quê?

Hugo: $x-3$ é igual a zero.

Professora: Ou $x-3$ é igual a zero. Reparem no que aconteceu, comecei com uma equação de 2.º grau e transformei em duas de 1.º grau.

Além de sugerir uma interpretação da resposta de Bernardo, a professora questiona os alunos para que completem a resolução. Hugo responde prontamente ao questionamento e a professora repete a sua resposta, salientando a relação entre a equação original e as equações agora obtidas. De seguida, a professora questiona os alunos com o objetivo de resolver cada uma das equações de 1.º grau, obtendo rapidamente a resposta de que as soluções são 0 e 3. Para terminar a resolução da equação, a professora justifica que as soluções encontradas são efetivamente soluções da equação:

Professora: Posso experimentar, é só substituir. Se for zero como diz o Luís, aqui ficava zero ao quadrado que dá zero, 12 vezes zero que é zero, zero menos zero dava zero. Se eu puser 3, também consigo anular. 3^2 dá 9 e 9 vezes 4, 36. E 12 vezes 3, também dá 36. Portanto, consegui encontrar duas soluções através da… O que é que eu apliquei aqui?

Vários alunos: Factorização.

A professora dá então por terminada a resolução, propondo aos alunos a resolução de três problemas de aplicação da lei do anulamento do produto para equações do 2.º grau do tipo $ax^2 + bx = 0$.

Neste segmento a professora depara-se com o problema de lidar com a intervenção de um aluno que introduz uma nova conjetura sobre a tarefa, afirmando a existência de outra solução. A professora decide explorar a conjetura, incentivando o aluno a explicitá-la. Dada a opção já tomada pela professora de introduzir um novo assunto (a resolução de equações do tipo $ax^2 + bx = 0$ pela lei do anulamento do produto) em diálogo com os alunos, a professora decide usar esta conjetura como ponto de partida para o respetivo estudo.

Segmento 5. A professora propõe aos alunos problemas de aplicação da lei do anulamento do produto, mas, antes de os discutirem, decide explorar novamente a resolução proposta por Maria, de modo a justificar porque surge apenas uma solução para a equação:

> *Professora:* Aqui há bocadinho, vou-lhe chamar agora o processo da Maria. Pela resolução da Maria chegámos a quantas soluções?
>
> *Aluno:* Esse tem uma.
>
> *Professora:* Uma solução. Mas quando fizemos pela factorização, chegámos a duas. A minha pergunta é… Mas vimos, confirmámos, que efetivamente esta equação tem duas soluções. A pergunta é, o que é que aconteceu aqui neste processo, porque é que aqui não aparece a solução zero? Isto dava (…) ou $x = 0$ ou $x = 3$, duas possibilidades. Aqui [na resolução da Maria], só aparece o $x = 3$. De repente parece que ficou escondida uma solução. O Luís disse logo que havia outra para além desta. (…) Porque é que aqui não me aparece a outra solução? [Nenhum aluno se manifesta.] Porque é que aqui só me parece $x = 3$ e ali consegui descobrir as duas soluções, o 0 e o 3?

A professora começa por enunciar a questão a discutir, alternando de seguida entre recordar os alunos do que tinha sido discutido e questionar com o objetivo de obter uma justificação para a diferença no número de soluções da equação. Mário indica que a resolução pela lei do anulamento do produto é a que permite “obter todas as possibilidades” e a professora direciona os alunos para analisaram a resolução de Maria. Os alunos centram a sua atenção no zero, mas o zero a que se referem é o zero do segundo membro da equação $4x^2 - 12x = 0$. A certa altura, Mário coloca a seguinte questão:

> *Mário:* Stôra, uma pergunta. Será que o zero aparece como segunda solução nas contas que… Aparece o c igual a zero?
>
> *Professora:* Isso é uma boa pergunta. Mas a minha pergunta… Essa é uma boa pergunta para, essa é pertinente. Mas a minha pergunta é porque é que ele não aparece aqui, antes de ir para essa. Porque é que ele aqui não aparece? E ali apareceu. E devia aparecer, devia aparecer toda.

Ainda que Mário tenha sugerido uma nova conjetura, a professora reforça que a discussão diz respeito à resolução de Maria, questionando de novo os alunos para que justifiquem a ausência de uma das soluções. Uma aluna torna a centrar-se na resolução pela lei do anulamento do produto, mas a professora volta a focar os alunos na resolução de Maria e Hélder intervém:

> *Hélder:* Porque não se pode dividir nada por zero.
>
> *Aluno:* Pode!
>
> *Professora:* [Escreve em letras garrafais 2/0] Pergunta para a turma.
>
> *Aluno:* Aí, um 2 tão grande.
>
> *Professora:* É mesmo para ver. O Hélder disse, aqui não aparece a solução zero porque a Maria, quando fez esta passagem, aqui divide por x. E, se eu colocar aqui o zero, o que o Hélder está a dizer é que não faz sentido eu colocar aqui um zero. A minha pergunta é, porquê? Quanto dá isto?
>
> *Aluna:* Dá zero.
>
> *João:* Indeterminado.

Como Hélder identifica o que leva a que não haja duas soluções na equação de Maria, mas outro aluno contrapõe a afirmação do colega, a professora interpreta a justificação de Hélder e questiona os alunos sobre um caso particular da divisão por zero, para esclarecer os alunos. Esta discussão leva a que os alunos concluam que não é possível dividir por zero, ideia que é reforçada pela professora:

> *Madalena:* Mesmo assim, nenhum número pode dividir por zero.
>
> *Professora:* Nenhum número pode dividir por zero.

Justificada a razão pela qual a resolução de Maria tem apenas uma solução, a professora dá por terminada a discussão.

Visto que nos segmentos anteriores a discussão não aborda um aspeto essencial da resolução da equação (a impossibilidade da divisão de ambos os membros por zero), a professora depara-se com o problema de selecionar o que discutir após dar uma tarefa aos alunos. Decide, então, retomar a discussão anterior, de modo a completar o estudo da equação. Um segundo problema neste segmento é que, perante uma questão, a professora não obtém resposta por parte dos alunos. Reformula então a questão, destacando outros aspetos da situação. Posteriormente, um aluno apresenta uma nova conjetura. Ainda que no segmento anterior tenha resolvido um problema idêntico explorando a conjetura do aluno, neste segmento decide terminar a discussão já iniciada e adiar a discussão da nova conjetura para outra ocasião.

Episódio 2 — Problema de proporcionalidade inversa

A segunda discussão que analisamos diz respeito ao problema apresentado na figura 3. Antes de ser iniciada a discussão em turma, os alunos têm cerca de 20 minutos para resolver este e outros três problemas de uma tarefa sobre proporcionalidade inversa distribuída no início da aula e que tem como finalidade sistematizar os conhecimentos dos alunos sobre este tópico.

1. A viagem aos Jogos Olímpicos vai custar ao clube desportivo 100 euros, mas o clube quer vender as rifas para a viagem de forma a ter 80 euros de lucro. As rifas serão todas vendidas e ao mesmo preço. A tabela seguinte representa a relação entre o número de rifas, n, que devem vender e o preço, p, em euros, de cada rifa.

Número de rifas (*n*)	3	4	5	
Preço de cada rifa (*p*) em euros	60	45	36	

a) Quantas rifas teriam de ser vendidas para que o preço de cada uma fosse 1,5 euros?

b) O número de rifas, *n*, é inversamente proporcional ao preço, p. Qual é a constante de proporcionalidade?

c) Indica uma expressão algébrica que traduza a relação entre as variáveis número de rifas, *n*, e preço, *p*, em euros, de cada rifa.

Figura 3 — Problema de proporcionalidade inversa

Segmento 1. Ao fim do tempo estipulado para resolverem a tarefa, muitos dos alunos estão ainda a trabalhar e a professora dá-lhes 5 minutos adicionais. Nessa altura, dá início à discussão, indicando que não é necessário que tenham terminado a tarefa pois durante a discussão podem esclarecer as suas dúvidas e convida os alunos a participar:

> Turma, eu sei que estão todos a trabalhar e sei que não temos muito tempo para concluir, mas vamos só fazer um bocadinho de discussão, está bem? (…) Fazemos agora oralmente, está bem? Até porque eu também… Apercebi-me de algumas dúvidas e assim… Primeiro exercício, quem lê alto? Voluntários. Diz Jorge.

O convite tem por principal objetivo recordar o problema, pois pede a um aluno que leia o problema antes de dar a sua resposta. Ainda antes de dar oportunidade a Jorge para apresentar a sua resolução, a professora recorda o objetivo da tarefa, sublinhando a importância da justificação:

> Vou só chamar a atenção. Uma das vantagens de vocês fazerem estes… São quatro ou cinco exercícios, é também perceberem a linguagem e o tipo de justificações das perguntas em que é exigida também alguma explicitação mais clara dos vossos raciocínios. Portanto, atenção quando diz "mostra como chegaste à tua resposta", não basta apresentar um valor. Têm de explicar, OK? Seja por auxílio dos vossos cálculos, seja porque entretanto descrevem com mais pormenor, já chamei a atenção.

Após esta introdução à discussão, a professora pede então a Jorge que apresente a sua resposta:

> *Professora:* Diz lá Jorge.
>
> *Jorge:* k igual a y vezes x.
>
> *Professora:* Vou escrever, depois a gente comenta.
>
> *Jorge:* k igual a 36 vezes 5, igual a 180, que é a constante.
>
> *Professora:* OK.
>
> *Jorge:* Depois, 180 a dividir por 1,5, igual a x.
>
> *Professora:* OK. Porque dividiste por 1,5?
>
> *Jorge:* Porque… Porque… Aqui diz que… Qual é o número de rifas que teriam de ser vendidas para que o preço de cada uma fosse 1,5.
>
> *Professora:* OK, foste ver quantos valores destes [1,5] cabiam aqui neste total [180].

Nesta interação, a professora começa por solicitar a participação de Jorge e vai registando no quadro o que o aluno vai apresentando, de modo a focar a atenção dos restantes alunos na sua resposta. Quando Jorge termina a apresentação da sua resolução, que envolve dois passos (determinação da constante e divisão da constante por 1,5) a professora pede-lhe para justificar a sua resolução. Procurando tornar mais clara a sua resposta, a professora interpreta o que ele diz, salientando a ideia de divisão. Assim, durante a discussão da primeira alínea do problema, a professora alterna entre ações de convidar, apoiar, sugerir, e desafiar, sendo as últimas três particularmente importantes para a compreensão da resolução do problema feita pelo aluno.

Tal como no episódio anterior, neste segmento, identificamos diversos problemas com os quais a professora tem de lidar durante a discussão. Um primeiro problema é a determinação do momento do início da discussão. A sua opção por não esperar que os alunos terminem a realização da tarefa (semelhante à indicada por Boaler, 2003) facilita uma discussão aberta das suas dúvidas. Um segundo problema reside no modo de fazer o convite aos alunos. Neste caso, a professora decide pedir "voluntários", o que tem a vantagem de promover a espontaneidade na participação dos alunos mas implica vários riscos: (i) os alunos que se oferecem são um número reduzido e são frequentemente os mesmos; (ii) as contribuições desses alunos podem não ser as mais indicadas para se começar. Um terceiro problema é determinar os pontos em que deve focar a atenção dos alunos de modo a orientar a discussão para aspetos que realmente interessam. Neste caso, a professora recorda o objetivo da tarefa, enfatizando a importância da justificação. No decorrer da discussão ocorrem novos problemas. Por exemplo, a professora tem de decidir o que fazer perante uma contribuição de um aluno (Jorge) que não é suficientemente clara para poder ser entendida pelos restantes alunos. Neste caso, decide registá-la no quadro, permitindo que se torne mais facilmente objeto de discussão. Na sequência, perante uma justificação oral desse mesmo aluno que sente ser confusa para os restantes alunos, a professora decide redizer. No final do segmento a professora debate-se com um novo problema: é apresentada uma solução por um aluno, que não sofreu contestação dos restantes, mas ela sente que subsistem dúvidas no ar. Neste ponto tem que decidir entre passar à questão seguinte ou explorar esta em mais profundidade, fazendo apelo a outras respostas. Neste caso, decide explorar outras possíveis resoluções tendo em vista conseguir uma melhor clarificação, dando assim origem ao segmento seguinte.

Segmento 2. A professora intervém tendo em vista criar uma oportunidade para que surjam outras resoluções:

> *Professora:* Quem não pensou assim? Quem pensou de outra forma ou fez de uma forma mais simples? [Nenhum aluno participa.] Todos fizeram assim? Todos sentiram a necessidade de escrever esta expressão [referindo-se a $k = y \times x$]?
>
> *Vários alunos:* Não.
>
> *Professora:* Não porquê?
>
> *Aluno:* Porque já estava lá a constante.
>
> *Professora:* Mas aplicaram? E precisaram de recorrer à constante?

Nesta interação com a turma, a professora começa por convidar outros alunos a participar. Este convite não obtém uma resposta imediata, uma vez que nenhum aluno apresenta outra resolução. A professora torna o convite mais específico, pedindo novas respostas. Vários alunos indicam terem feito a questão de outro modo mas voltam a não ser muito explícitos. A professora torna a questioná-los, primeiro, procurando que explicitem a sua resposta e depois chamando a atenção dos alunos para o papel da constante. Por fim, Luís responde ao desafio da professora:

> *Luís:* Não.
>
> *Professora:* Porquê, Luís?
>
> *Luís:* Então, a viagem ia custar 100 euros e eles queriam ter 80 de lucro, portanto tinha de dar 180.

> Professora: Eu senti que houve algumas dificuldades no que significa 80 de lucro, 80 de lucro… O lucro é qualquer coisa a mais do que eu tenho, se eu queria 100… Atenção, aqui neste caso [a resolução de Jorge], o Jorge chegou a este valor pela constante, mas houve alguns que seguiram um raciocínio um bocadinho diferente como o Luís, convém explicar depois de onde é que surge os 180, são os 100 mais os 80 que eu tenho de ter de lucro [escreve no quadro 100 + 80 = 180], OK? Quando eu vender as minhas rifas tenho de conseguir este total [180].

Dada a resposta de Luís, a professora começa por solicitar uma justificação, que o aluno apresenta com facilidade. Considerando a resposta do aluno e algumas dúvidas que surgiram durante a resolução sobre o significado da palavra lucro, a professora elabora um pouco acerca do significado deste termo, procurando facilitar a sua interpretação. Após o esclarecimento, foca a atenção dos alunos na resposta de Luís, destacando os seus aspetos essenciais.

Neste segmento surge um novo problema: os alunos não respondem ao convite feito pela professora do modo que esta espera. O modo como a professora lida com este problema é lançando novas questões, procurando concretizar o convite, o que finalmente acaba por conseguir. Ainda neste segmento, surge o problema de alguns alunos apresentarem dificuldades na interpretação de um termo que é importante para a compreensão da questão proposta ("lucro") e a professora decide elaborar um pouco acerca do seu significado.

Segmento 3. Após sintetizar a resposta à primeira alínea do problema, a professora convida os alunos a apresentarem as suas respostas à alínea b), dando a vez a outro aluno:

> *Professora:* Alínea b. Voluntário, vá [Jorge levanta o braço]. Outro. Guilherme.
>
> *Guilherme:* [Lê o enunciado.] Ali, a constante é y vezes x, que é 36 vezes 5 é 180.
>
> *Professora:* Tinha de pegar nestes dois valores?
>
> *Alunos:* Não.
>
> *Professora:* Então? José.
>
> *José:* Podia pegar no 3 vezes 60.
>
> *Professora:* 3 vezes 60. Só esses dois?
>
> *Outro aluno:* 4 vezes 45.
>
> *Professora:* Ou 4 vezes 45. Então posso utilizar…

Alunos: Qualquer…

Professora: Qualquer um dos pares da tabela. Então aqui, *k* igual a 180.

Dado que se trata de uma tarefa realizada no final da unidade didática, a professora aproveita a oportunidade para verificar se os alunos entenderam as propriedades da proporcionalidade inversa. Assim, nesta interação, dada a resposta de Guilherme, a professora propõe que sejam considerados outros pares de valores, levando os alunos a usar estas propriedades, estabelecendo assim conexões entre o problema e propriedades já conhecidas e fazendo uma generalização — qualquer par de valores permitiria obter a constante de proporcionalidade. Esta proposta da professora é alternada com repetições das afirmações dos alunos, com o intuito de focar a atenção da turma nas respostas dadas. Para terminar a discussão da resolução da alínea b), a professora sistematiza os resultados obtidos e as justificações necessárias, sugerindo uma interpretação das respostas apresentadas pelos alunos.

Este segmento é dos que se revelam menos problemáticos para a professora, em grande medida porque a identificação da constante de proporcionalidade já tinha sido feita implicitamente nos segmentos anteriores. O problema mais importante com que se confronta nesta fase é decidir se a primeira resposta que obtém (de Guilherme) e que está correta é suficiente ou se é melhor aprofundar mais a questão, decidindo por esta última opção.

Segmento 4. Tal como nas alíneas anteriores, a professora inicia a discussão da alínea c) convidando os alunos a participar. Escolhe Bernardo, porque, durante a resolução da tarefa identifica dificuldades do aluno na resolução do problema, e decide dar-lhe uma oportunidade de esclarecer a sua resolução:

Professora: O c. Bernardo, conta.

Bernardo: [Lê o enunciado.] Professora, esta é a constante que é 180 é igual a *n* vezes *x*. Ou também podia ser *k* a dividir por *p* igual a *x*.

Professora: Vou escrever.

A professora regista a resposta de Bernardo no quadro. Contudo, dado que esta resposta não usa as variáveis dadas no enunciado, questiona o aluno com o intuito de que recorde informação relevante para a resolução do problema:

Professora: Eu faço-te só uma pergunta: no enunciado, quais são as incógnitas que eles utilizam?

(…)

Bernardo: Na alínea c? *n* e *p*.

Professora: *n* e *p*. Quando vocês indicam a expressão… Se não houvesse essa indicação, aqui utilizava… [Maria levanta o braço]. Diz Maria.

Nesta interação, além de reforçar a ideia de Bernardo repetindo-a, a professora começa uma sugestão quanto ao uso de determinadas variáveis dependendo das informações dadas no enunciado.

Contudo, visto que Maria levanta o braço, a professora decide interromper a sugestão que estava a apresentar, deixando a aluna participar:

> *Maria:* Eu pus p igual a cento e oitenta a dividir por n.
>
> *Professora:* [Escreve no quadro a expressão de Maria.] Eu quero saber se aqui esta do Bernardo está correta [referindo-se a $180 = n \times x$].
>
> *Vários alunos:* Não.
>
> *Professora:* Não está correta?

A professora aproveita, assim, a interrupção de Maria e a sua resolução para avançar na discussão. Começa por escrever a expressão que a aluna apresenta, solicitando de seguida que os alunos avaliem a resposta de Bernardo, reforçando quase de imediato esse desafio de avaliação dado que vários alunos dizem que esta resposta é incorreta.

De seguida, em diálogo com outros alunos, a professora interpreta a resolução de Bernardo de acordo com os dados do enunciado. Como Bernardo continua a mostrar dificuldades em dar a resposta correta, a professora apoia-o, levando-o a recordar o enunciado do problema. Na sequência desta interação, o aluno continua com dificuldade em identificar o que pretendia representar por x, pelo que a professora torna, por mais quatro vezes, a questionar o aluno no sentido de o focar nos dados do problema. Por fim, depois de várias intervenções Bernardo reconhece que "k é 180, que é que é igual a n vezes p".

Este segmento revela-se bastante problemático, dado o facto de um aluno (Bernardo) ter decidido usar variáveis diferentes das indicadas no enunciado. Coloca-se-lhe, portanto, o problema de saber como levar os restantes alunos da turma, a reconhecer as variáveis a usar na resolução. A sua primeira estratégia é chamar a atenção para o enunciado da questão, na expectativa que isso pudesse levar os alunos a reconhecer as variáveis a usar. No entanto isso não acontece e enquanto procura decidir o que fazer, permite a intervenção de uma outra aluna (Maria) que oferece outra resposta. A professora usa esta resposta como referente implícito e procura que o primeiro aluno perceba quais as variáveis a usar, o que no entanto se revela mais complicado que o que seria previsível. Finalmente a professora consegue que o aluno faça uma nova representação da sua resposta, em ligação com a sua resposta inicial, dando-lhe alguma valorização.

Segmento 5. Ao obter de Bernardo a representação pretendida e focar os alunos nessa representação, a professora faz um convite, colocando uma nova questão à turma:

> *Professora:* Agora eu quero saber: Se eu tivesse assim $\left[n = \frac{180}{p}\right]$, que é o que o Bernardo tinha, se esta expressão é equivalente a esta [$180 = n \times p$]?
>
> *Vários alunos:* Sim.

> *Professora:* E à da Maria?
>
> *Vários alunos:* Sim.
>
> *Professora:* E quero saber se alguém escreveu uma outra expressão equivalente a esta.

Neste momento da discussão, o questionamento da professora tem por objetivo comparar, primeiro, as duas expressões apresentadas por Bernardo e, depois, as expressões de Bernardo com a de Maria. Após este questionamento, a professora solicita ainda outras expressões equivalentes, mas não obtém resposta. Neste segmento a professora depara-se com o problema de saber como explorar as possíveis conexões entre as respostas já produzidas, decidindo introduzir a noção de equivalência de expressões.

Segmento 6. A professora faz menção de prosseguir com a discussão do problema seguinte, mas é interrompida por Jorge:

> *Professora:* Alguém que tenha escrito uma expressão [diferente]? Não? OK. Exercício…
>
> *Jorge:* A stôra metia mal se metêssemos *y* vezes *x*?
>
> *Professora:* Não, não te metia mal, mas quando um exercício não te fala nem em *x* nem em *y* deves utilizar as incógnitas que aqui estão referenciadas.
>
> *Irina:* Então podemos meter qualquer uma?
>
> *Professora:* Quando vos pedem uma expressão algébrica, vocês podem utilizar qualquer uma delas.

Assim, a professora começa por enfrentar o problema de um pedido de esclarecimento inesperado feito por Jorge, a que responde sugerindo uma interpretação do tipo de questões colocadas no enunciado do problema. Com a intervenção de Irina, a professora sugere ainda uma avaliação quanto às expressões algébricas que podem ser usadas em problemas desta natureza, dando assim por terminada a discussão deste problema de proporcionalidade inversa. Este segmento surge por iniciativa de um aluno (Jorge), que recebeu um pronto acolhimento por parte da professora, e que coloca ainda uma questão relacionada com o que foi um ponto importante da discussão anterior — a escolha das variáveis a usar.

Discussão

O modelo de análise das discussões permite caraterizar as ações da professora na discussão dos dois episódios. As figuras 4 e 5 mostram o número de ações de cada tipo bem como os movimentos entre ações — o número de cada seta corresponde ao número de passagens de uma ação para outra. As zonas sombreadas das figuras destacam as ações mais frequentes. No episódio 1, a professora usa sobretudo ações de desafiar, seguindo-se apoiar e sugerir. Contudo, no primeiro segmento deste episódio, as ações da professora são maioritariamente de sugerir (3 ações) e de apoiar (5 ações). Como a discussão não diz respeito a uma tarefa previamente trabalhada pelos alunos, a professora sente a necessidade de apoiar os alunos a prosseguir com as suas intervenções. Nos segmentos seguintes já existe uma resolução que serve de referência. Nos dois primeiros segmentos as tentativas de solução não são bem-sucedidas, no terceiro surge uma solução, no quarto surge o método geral de resolução e no quinto é analisada a razão porque se tinha obtido apenas uma solução. Neste episódio, o facto de a discussão não ter por base uma tarefa previamente resolvida, leva a que o primeiro segmento assuma caraterísticas muito particulares. Durante a discussão, grande parte das ações de sugerir e de apoiar levam a ações de desafiar, sendo as próprias ações de desafiar muitas vezes seguidas de novas ações do mesmo tipo. Assim, esta discussão é fortemente marcada pelas ações de desafiar.

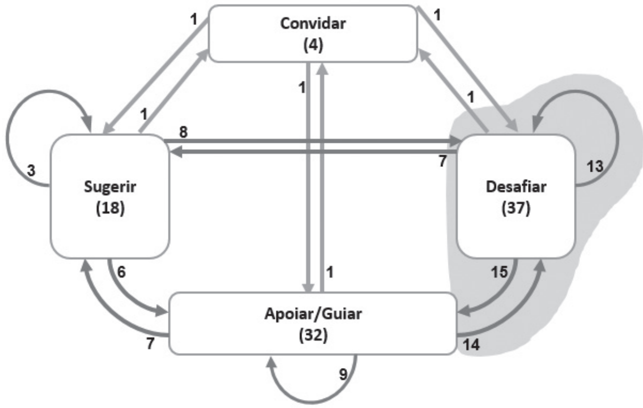

Figura 4 — Ações da professora na discussão do episódio 1

No episódio 2, as ações mais usadas pela professora são as de desafiar os alunos e as ações de apoiar. As ações de sugerir surgem com menos frequência e quase sempre dão origem a novas ações de sugerir ou de convidar. Estas ações estão maioritariamente associadas ao final das resoluções de cada alínea do problema, onde a professora sintetiza e destaca aspetos que considera fundamentais. Ainda que a sequência de ações da professora varie ao longo da discussão, é possível verificar que em grande parte dos casos, as ações de desafiar dão origem a novas ações de desafiar. De modo semelhante, as ações de apoiar, surgem também frequentemente seguidas de novas ações de apoiar. Com uma expressão idêntica, surge ainda a alternância entre ações de apoiar e desafiar. Assim, esta discussão é marcada por ações de apoio e desafio e pela estreita relação que a professora estabelece entre estas duas ações. No episódio 1 predominam claramente as ações de desafiar (41% do total), seguidas das ações de apoiar/guiar (35%), enquanto no episódio 2 a frequência destes dois tipos de ações (37%–39%) é semelhante. A maior frequência de ações de guiar/apoiar no episódio 2 em comparação com o episódio 1, pode ter a ver com o facto de se estar a discutir um problema já previamente resolvido pelos alunos, requerendo algum apoio para se ultrapassarem diversas dificuldades que os alunos vão manifestando.

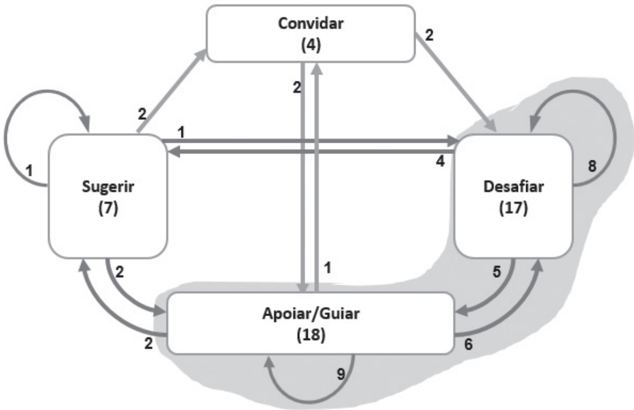

Figura 5 — Ações da professora na discussão do episódio 2

Nestes dois episódios nota-se uma preocupação da professora em salientar aspetos importantes do raciocínio matemático. Assim, a professora encoraja os alunos a formularem conjeturas tendo em vista encontrar solução para as questões propostas. No primeiro procura e consegue que os alunos estabeleçam duas importantes generalizações — os princípios de equivalência usados na resolução de equações do 1.º grau podem ser usados igualmente na resolução desta equação e é possível resolver estas equações por decomposição em fatores, transformando o problema na resolução de duas equações do 1.º grau. No segundo os alunos recordam a generalização em que é possível obter a constante de proporcionalidade inversa a partir de qualquer par de valores correspondentes. Pelo seu lado, os pedidos de justificação são uma constante ao longo da discussão, nomeadamente ao perguntar o "porquê" de determinada afirmação feita por um aluno. Salienta-se, pela sua importância, a justificação do facto da primeira resolução só ter conduzido a uma solução da equação.

Conclusão

Em cada uma das situações a professora inicia o trabalho com um plano de ação bem determinado. No primeiro episódio procura construir em diálogo com a turma a solução geral da equação incompleta do 2.º grau pela lei do anulamento do produto. No segundo episódio conduz a resolução de um problema de proporcionalidade inversa, procurando que os alunos compreendam como este problema pode ser expresso através da representação algébrica e qual o significado, na situação em causa, da constante de proporcionalidade. Na concretização destes planos de ação a professora depara-se com numerosos problemas, alguns dos quais aparecem de forma recorrente, como (i) a seleção de um aluno como interlocutor, (ii) o modo de agir quando um aluno questiona ou faz uma conjetura, (iii) o modo de agir perante desacordos, (iv) aprofundar ou não uma resolução, que os alunos já dão por concluída, ou (v) o modo de agir perante uma situação de impasse, uma resolução incorreta ou uma explicação pouco clara. Perante estes problemas, a principal estratégia da professora é procurar que os alunos introduzam novas ideias matemáticas, aprofundem ideias em discussão ou avaliem ideias apresentadas. Por isso, as suas ações passam frequentemente por reformular questões já colocadas, solicitar a participação de outros alunos ou da turma e por retomar questões já anteriormente colocadas mas que não considerou adequado serem discutidas no momento em que surgiram.

Uma característica importante do modelo de análise que usamos neste trabalho é que ele é *descritivo e não prescritivo*. Isto quer dizer que o modelo não indica o que o professor "deve" fazer mas sim o que o professor pode fazer em situações diversas. Numas situações pode ser mais apropriado o professor empreender certas ações, noutras situações, ações bem diferentes. No entanto, verifica-se que nos dois episódios analisados as discussões evoluem em ciclos, marcados pelas questões da tarefa proposta ou por eventos que, por vezes, surgem na discussão e que suscitam uma atenção específica. Um segmento começa em regra com um convite e, perante as respostas dos alunos, a professora intervém sobretudo com ações de desafiar, procurando estender o seu conhecimento, ou apoiar, procurando sustentar a participação dos alunos. De uma forma geral, um segmento acaba com uma ação de sugerir, na forma de uma pequena síntese, que resume os aspetos principais trabalhados e que os alunos devem registar. A atividade da professora é assim conduzida por um motivo principal, levar os alunos a aprender um determinado assunto, aproveitando no entanto as ocasiões que surgem para reforçar aprendizagens anteriores bem como aspetos de natureza transversal, como a capacidade de raciocínio, nomeadamente de generalização e justificação matemática. Apoiando-se em caraterizações sobre o trabalho do professor em momentos de discussão (Brodie, 2010; Cengiz *et al.*, 2011), o modelo de análise usado salienta o papel que podem assumir as ações de desafio do professor.

Este estudo evidencia que um foco de análise específico nas ações do professor, identificando os problemas com que este se depara na condução da aula, permite identificar a estratégia geral seguida, bem como o sucesso ou insucesso na sua concretização. Sem minimizar o valor da preparação prévia (Stein *et al.*, 2008), evidencia também a importância do professor ser capaz de lidar com situações imprevistas. Os episódios aqui relatados referem-se à construção em coletivo de um processo geral de resolução de uma importante classe de equações e à aplicação de conhecimentos já anteriormente estudados na resolução de um problema, salientando a interpretação da representação algébrica. Haverá que estudar aulas conduzidas com outros propósitos, neste e noutros níveis de ensino, de modo a identificar os problemas que se colocam bem como modos de trabalho particularmente produtivos na consecução de diversos objetivos curriculares.

Notas

[1] Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT — Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto Práticas Profissionais dos Professores de Matemática (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008).

[2] Que referiremos simplesmente por *apoiar*.

[3] Que referiremos simplesmente por *sugerir*.

Referências

Boaler, J. (2003). Studying and capturing the complexity of practice: The case of the 'dance of agency'. In *Proceedings of PME Conference* (Vol. 1, pp. 3–16).

Brodie, K. (2010). *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms.* New York,NY: Springer.

Cengiz, N., Kline, K., & Grant, T. J. (2011). Extending students' mathematical thinking during whole-group discussions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*, 355–374.

Fraivillig, J. L., Murphy, L. A., & Fuson, K. C. (1999). Advancing children's mathematical thinking in everyday mathematics classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(2), 148–170.

Jaworski, B., & Potari, D. (2009). Bridging the macro- and micro-divide: Using an activity theory model to capture sociocultural complexity in mathematics teaching and its development. *Educational Studies in Mathematics*, *72*, 219–236.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, *27*(1), 29–63.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2012). Raciocínio matemático em conjuntos numéricos: Uma investigação no 3.º ciclo. *Quadrante*, *21*(2), 81–110.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461–494). Roterdham: Sense.

Ponte, J. P., Nunes, C. C., & Quaresma, M. (2012). Explorar, investigar, interagir na aula de Matemática: Elementos fundamentais para a aprendizagem. In A. C. Silva, M. Carvalho & R. G. Rêgo (Eds.), *Ensinar Matemática: Formação, investigação e práticas docentes* (pp. 49–74). Cuiabá: UFMT.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Brunheira, L., Varandas, J. M., & Ferreira, C. (1998). O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. *Quadrante*, *7*(2), 41–70.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Branco, N. (2012). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Avances en Investigación en Educación Matemática*, *1*, 65–86.

Schoenfeld, A. (2000). Models of the teaching process. *Journal of Mathematical Behavior*, *18*(3), 243–261.

Sherin, M. G. (2002). A balancing act: Developing a discourse community in the mathematics classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *5*, 205–233.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*, 313–340.

Wood, T. (1999). Creating a context for argument in mathematics class. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(2), 171–191.

Resumo. O objetivo deste artigo é compreender como se desenvolve a prática de condução de discussões coletivas na aula de Matemática, identificando problemas que emergem na sua realização. A prática do professor é vista como uma atividade baseada num motivo e realizada através de um conjunto de ações, sendo dada atenção especial ao modo como se promove o raciocínio matemático dos alunos. O estudo é realizado na aula de uma professora experiente do 9.º ano. A recolha de dados tem por base a observação de aulas (vídeo e áudio gravadas), complementada por conversas com a professora, sendo os dados analisados com base num modelo relativo aos tipos de ações da professora. Os resultados mostram que a discussão é fortemente marcada pelas ações de desafiar, que tanto surgem de ações de sugerir e guiar, como de ações anteriores de desafiar. Mostram também a importância das ações de guiar, que tanto se seguem umas às outras como alternam com ações de desafiar. Um segmento acaba usualmente com uma ação de sugerir que sintetiza os aspetos principais a registar pelos alunos. Na concretização destes planos de ação surgem numerosos problemas que o professor precisa de enfrentar, alguns dos quais aparecem de forma recorrente.

Abstract. The purpose of this article is to understand how the practice of conducting whole class discussions in mathematics develops, identifying problems that emerge in its realization. Teaching practice is seen as an activity based on a motive and carried out through a set of actions, with special attention given to the way in which students' mathematical reasoning is promoted. The study is carried out in the classroom of an experienced grade 9 teacher. Data collection is based on classroom observations (video and audio recorded), supplemented by conversations with the teacher, and data analysis is carried out based on a model for the different teachers' actions. The results show that discussions are strongly marked by challenging actions which arise from suggesting and guiding actions as well as from previous challenging actions. They also show the importance of the guiding actions, which sometimes follow each other or else alternate with challenging actions. A discussion segment usually ends with a suggesting action that summarizes the main aspects to be recorded by the students. In the implementation of these action plans there are numerous problems that the teacher needs to face, some of which appear in a recurrent way.

JOÃO PEDRO DA PONTE
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ul.pt

JOANA MATA-PEREIRA
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
joanamatapereira@campus.ul.pt

MARISA QUARESMA
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
mq@campus.ul.pt

(recebido em abril de 2013, aceite para publicação em outubro de 2013)